

Olimpiada Informática Española 2017

Soluciones de los problemas

22 de abril de 2017

Dígitos seguidos [Matemáticas]

Dados un natural n y una base b , ¿qué dígito aparece más veces de forma consecutiva en la representación de n en base b ?

Solución

- 1 $n_0 = n$
- 2 Obtenemos n_{i+1} y r_i tales que $n_i = bn_{i+1} + r_i$ con $0 \leq r_i \leq b-1$, para todo i mientras $n_i \neq 0$.
- 3 $r_k r_{k-1} \dots r_1 r_0$ es n en base b .

Basta con iterar sobre los r_i para resolver el problema.

Otro problema del juego de la vida [Simulación]

Dada una matriz toroidal de $n \times m$ simula el juego de la vida de Conway durante t iteraciones.

Solución

Dada la matriz en un cierto instante i , se puede generar la matriz en el instante $i + 1$ siguiendo las reglas del enunciado.

Es recomendable utilizar dos matrices en lugar de ir actualizando sobre la misma y hay que tener cuidado de no acceder a posiciones fuera de la matriz.

Palabra circular [Ad-hoc]

Escribir si existe una palabra circular de n letras usando a o b de forma que k letras sean igual a su anterior o siguiente.

Solución

- Si $k = n$, una palabra con n as es válida.
- Si n es par y $k = 0$, una palabra formada que alterna a y b es válida.
- Si $n - k$ es par y $k \geq 4$, se puede alternar a y b hasta las $n - k$, seguir con aa y terminar poniendo bs .
- Si $n - k$ es impar y $k \geq 2$, se procede como en el caso anterior pero omitiendo el par aa .
- Cualquier otra combinación de n y k no es posible.

Mínimo local [Búsqueda binaria]

Encontrar un mínimo local en una permutación de n elementos.

Solución

- 1 $[0, n - 1]$ tiene necesariamente un mínimo local.
- 2 Si $[a, b]$ tiene mínimo local:
 - $p_{\frac{a+b}{2}} < p_{\frac{a+b}{2}+1}$: $[a, \frac{a+b}{2} + 1]$ tiene mínimo local.
 - $p_{\frac{a+b}{2}} > p_{\frac{a+b}{2}+1}$: $[\frac{a+b}{2}, b]$ tiene mínimo local.

La anterior observación permite refinar el intervalo inicial hasta encontrar el mínimo local.

Buffet [Programación Dinámica]

Dados n platos donde el i -ésimo tiene c_i calorías y es incompatible con los x_i anteriores y siguientes, maximiza el número de calorías

Solución

Sea $M(i, j)$, $i < j$, las máximas calorías consumibles si tenemos los platos $[j, n - 1]$ y el último plato escogido ha sido el i . La solución buscada es $M(-, 0)$.

$$M(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \geq n \\ M(i, j + 1) & \text{si } i \geq i - x_j \\ \text{máx}\{M(i, j + 1), M(j, j + x_j + 1) + c_j\} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Archipiélago [Grafos]

Dado un bosque de n nodos pinta el mínimo número de nodos tal que todos estén a distancia como mucho 1 de un nodo coloreado.

Solución

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que es un árbol con $n \geq 2$. Haciendo un DFS desde la raíz, usamos las siguientes reglas:

- Es absurdo pintar una hoja.
- Pintamos un nodo si y sólo si alguno de sus hijos no está cubierto o si es la raíz y no está cubierta.

Dominó [Grafos]

Dadas n piezas no distintas de dominó con números arbitrariamente grandes construye una secuencia con todas ellas si es posible.

Solución

Sea S el conjunto de números diferentes que aparecen en las piezas.

- 1 Creamos un grafo G con un vértice por cada número en S .
- 2 Por cada pieza $\{x, y\}$ creamos una arista $\{x, y\}$.

Existe una solución si y sólo si G tiene un camino euleriano.