Segundo Clasificatorio OIE 2021

Soluciones a los problemas

XXV OIE 2021

27 de febrero 2020

Autores de problemas:

- Alberto Maurel Serrano
- Edgar Moreno Martínez
- Félix Moreno Peñarrubia
- Izan Beltran Ferreiro

Equipo de preparación:

- Blanca Huergo Muñoz
- Javier Nistal Salas
- Jordi Guillem Rodríguez Manso
- Max Balsells i Pamies
- Miquel Ortega Sánchez-Colomer
- Pablo Hidalgo Palencia

Estadísticas

- Número de participantes (con al menos un envío): 57
- Número de envíos: 557
- Puntuación máxima: 462 (400 sin contar ya clasificados)
- Puntuación séptima posición: 264 (sin contar ya clasificados)
- Puntuación mediana: 164

Parejas

Enunciado

Se dan n enteros, donde n es un número par. Determinar si se pueden emparejar en $\frac{n}{2}$ parejas tal que las sumas de los dos números de cada pareja sean iguales para todas las parejas.

Autor: Félix Moreno Peñarrubia

- Número de soluciones con 100 puntos: 40
- Número de soluciones con 90 puntos: 4
- Número de soluciones con 40 puntos: 1
- Primera solución con 100 puntos: Òscar Garries Urbina, 00:01:59

Parejas

Solución

Si $a_1, \ldots, a_n$ están ordenados, hay que emparejar a_1 con a_n, a_2 con a_{n-1}, etcétera. (Se ve que tiene que ser así porque si no emparejamos a_1 con a_n entonces la pareja que tenga a_n tendrá suma más grande que la que tenga a_1. Quitamos estos dos números y vamos repitiendo el razonamiento).
Por tanto, lo que hacemos es ordenar la secuencia y comprobar si las parejas de esta forma tienen todas la misma suma. Complejidad $\mathcal{O}(n \log n)$ por la ordenación.

¡Papalíndromos!

Enunciado

Dada $f(a) = \left\lfloor \frac{a+a'}{2} \right\rfloor$ (donde a' denota a girado) y un valor inicial hay que decir cual es el primer palíndromo de la secuencia de aplicar sucesivamente f o si no existe dicho valor.

Autor: Edgar Moreno Martínez

- Número de soluciones con 100 puntos: 26
- Número de soluciones con 40 puntos: 8
- Número de soluciones con 30 puntos: 1
- Primera solución con 100 puntos: Pau Martí Biosca, 00:09:27

¡Papalíndromos!

Idea clave

Los valores sucesivos nunca aumentan en número de dígitos.

Solución

Si vamos calculando los valores sucesivos (necesitamos una función que nos gire un número) podemos ir comprobando si el número actual es un palíndromo. Si lo es, hemos acabado. En caso contrario, nos apuntaremos en un diccionario/conjunto que ya hemos visto el número y si volvemos a tener el mismo número sabemos que estamos en un ciclo. Por la observación anterior solo podemos tener un número finito de valores por lo que acabaremos ciclando o encontrando un palíndromo.

¡Alerta!

El ciclo podría ser muy largo y que el problema no entrase por tiempo. Experimentalmente se puede comprobar que para el rango dado de valores no encontramos esta situación.

¡Papalíndromos!

Floyd's algorithm

Aunque no era necesario, podíamos usar el algoritmo de Floyd para la detección de ciclos para ahorrarnos la memoria extra del diccionario/conjunto. Este algoritmo se basa en tener dos punteros, una *tortuga* y un *conejo*. En cada iteración movemos la *tortuga* una posición y el *conejo* dos posiciones (2 aplicaciones de f). Si existe un ciclo acabaremos teniendo la tortuga en la misma posición que el conejo después de $\mathcal{O}$(longitud del ciclo + pasos para llegar al ciclo) iteraciones.

.

Números en la cuadrícula

Enunciado

Hay una cuadrícula con $n \times m$ casillas (distribuidas en n filas y m columnas). Inicialmente, en cada casilla está escrito el número 0.
Se realizan q operaciones, donde cada operación consiste en, dada una fila o una columna determinada y un número x, reemplazar el número que hay escrito en cada una de las casillas de esa fila o columna por x.
Di la suma de los números que hay en la cuadrícula después de realizar las q operaciones.

Autor: Félix Moreno Peñarrubia

- Número de soluciones con 100 puntos: 2
- Número de soluciones con 53 puntos: 3
- Número de soluciones con 42 puntos: 1
- Número de soluciones con 14 puntos: 28
- Primera solución con 100 puntos: Òscar Garries Urbina, 3:04:01

Números en la cuadrícula

Idea clave

Procesar las operaciones desde el final en orden inverso.

Solución

Si se empieza desde el final, podemos calcular la aportación a la suma total de una operación del siguiente modo:

- Si la fila o la columna de la operación ya ha tenido una operación, entonces no afecta (todos los números que se escriban serán sobreescritos en la operación posterior).
- Si no, si la operación es de fila, la cantidad de números que no se sobreescribirán será de m menos el número de columnas sobre las que ya se ha hecho (posteriormente, porque vamos en orden inverso) una operación. Por tanto, la aportación de esta operación a la suma final es el número que se escribe multiplicado por esa cantidad.

Por tanto, si iteramos desde el final manteniendo en dos vectores de booleanos las filas y columnas usadas y en dos enteros la cantidad de filas y columnas usadas podemos calcular el resultado en tiempo $\mathcal{O}(n + m + q)$

Torres de colores

Enunciado

Dados unos cuantos colores y unos cuantos discos de cada color hay que distribuirlos en el mínimo número de torres tal que todas las torres son igual de altas y cada torre tiene que ser "palindrómica" en los colores mirados de arriba a abajo y de abajo a arriba.

Autor: Edgar Moreno Martínez

- Número de soluciones con 100 puntos: 4
- Número de soluciones con 62 puntos: 4
- Número de soluciones con 33 puntos: 2
- Número de soluciones con 24 puntos: 13
- Número de soluciones con 8 puntos: 2
- Primera solución con 100 puntos: Pau Martí Biosca, 01:09:36

Torres de colores

Paridad y casos 1 y 2

¡La paridad es muy importante! Si hay 0 o 1 color con un número impar de discos los podemos apilar en una sola torre. Si hay n colores impares necesitaremos como mínimo n torres.

¡Importante!

El número de torres debe dividir la suma de discos y su cociente será la altura.

Cómo construimos nuevas torres

Si hay algún color impar, la altura de las torres debe ser impar. La paridad del número de torres tiene que ser igual que la de colores impares, esto viene de que para crear una torre de altura impar nueva tendremos que coger 2 piezas de un color y crear dos torres nuevas.

Torres de colores

Solución

El caso de impares 0 o 1 lo hacemos trivialmente.
Empezamos intentando hacerlo con tantas torres como colores impares. Si no cumple las condiciones podemos intentarlo con dos torres más hasta que se pueda. Esto es lineal en la suma de piezas para todos los colores.
La idea eficiente es encontrar todos los divisores de la suma en $\mathcal{O}(\sqrt{\text{suma}})$, comprobar las condiciones para cada uno y quedarnos con el mínimo.

Pintando pasos de peatones

Enunciado

Dada una serie de intervalos, determinar cuál es el menor m, de forma que podamos recubrir todos los intervalos anteriores con a lo sumo k intervalos de a lo sumo tamaño m.

Autor: Alberto Maurel Serrano

- Número de soluciones con 100 puntos: 1
- Número de soluciones con 50 puntos: 3
- Número de soluciones con 15 puntos: 2
- Primera solución con 100 puntos: Òscar Garries Urbina, 01:14:10

Pintando pasos de peatones

Solución

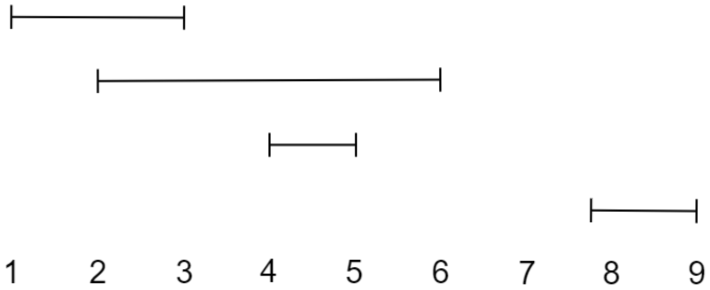
En primer lugar, vamos a simplificar el problema. Para un cierto tamaño m fijado, ¿somos capaces de determinar cuántos intervalos necesitamos para cubrir los intervalos originales?

Este es un problema que se puede resolver con un método conocido: *Sweep line*

Pintando pasos de peatones

Solución

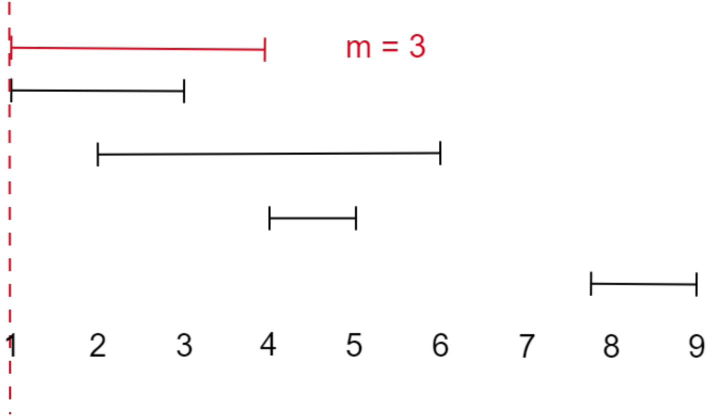
1. Ordenamos los intervalos por orden creciente de extremo izquierdo.



Pintando pasos de peatones

Solución

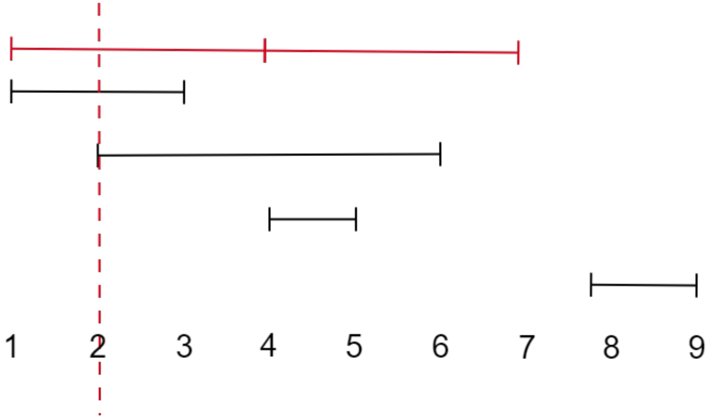
2. Procesamos de izquierda a derecha.
   - Si no tenemos un intervalo abierto, lo abrimos.



Pintando pasos de peatones

Solución

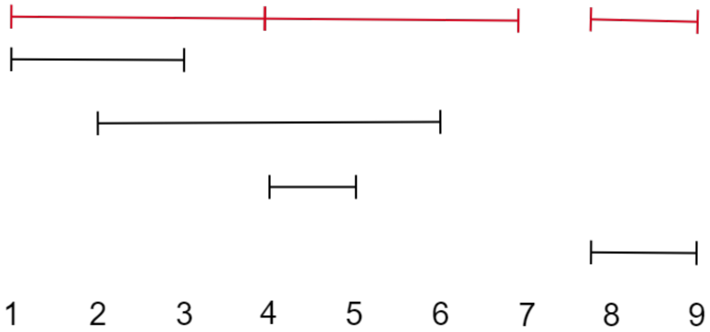
- Si tenemos un intervalo abierto, lo aprovechamos.



Pintando pasos de peatones

¡Ojo!

Podemos necesitar varios intervalos nuevos para cubrir uno antiguo. Para calcularlo eficientemente, podemos usar la división.



Pintando pasos de peatones

Solución

¿Cómo podemos aprovechar esta versión simplificada del problema?
Está claro que si podemos recubrir un conjunto de intervalos con k intervalos de tamaño m, también lo podemos hacer con intervalos de tamaño $l > m$.
De igual forma, si no podemos recubrirlos con intervalos de tamaño m, tampoco lo podremos hacer con intervalos de tamaño $l < m$.

Esta monotonía en la solución nos permite averiguar el valor m mediante **búsqueda binaria**. Esto conduce a un algoritmo con complejidad $\mathcal{O}(n \ \log n \ + n \log max(a_i + l_i))$

Cubos de oro

Enunciado

Tienes distintas cantidades de 3 tipos de pepitas de oro, distribuye estas pepitas en cubos, de forma que siempre haya una mínima cantidad de oro en cada cubo y en el que en al menos un cubo sale ganando el cliente, maximizando el beneficio total.

Autor: Izan Beltran Ferreiro

- Número de soluciones con 37 puntos: 2
- Primera solución con 37 puntos: Daniel López Piris, 3:10:48

Cubos de oro

Observación 1

Solo necesitamos un cubo en el que el cliente sale ganando, el resto de cubos los usaremos para maximizar el beneficio de la empresa.

Observación 2

Si nos olvidamos del cubo en el que el cliente sale ganando, en el resto de cubos nunca pondremos una pepita si ya tienen 100mg de oro o más.

Solución

Si conocemos los siguientes datos:

- Cantidad que nos falta para alcanzar el mínimo oro en el cubo actual
- Cantidades restantes de pepitas de tipo 1, 2 y 3.

Podemos representar completamente el estado de una solución y obtener una solución recursiva.
Llamamos a estos valores r, a, b y c; respectivamente.

Cubos de oro

Solución

Dados r, a, b y c; podemos representar completamente el estado de una solución y obtener una recurrencia.
Podríamos pensar, dado un estado, en probar todas las formas de coger las pepitas para el cubo actual, pero si simplemente vamos probando a coger una única pepita de oro, esto nos lleva a un nuevo estado que podemos calcular recursivament, ahorrando muchas iteraciones.

Cubos de oro

Solución

Obtenemos la siguiente recurrencia:

$$
\begin{aligned}
&f(r,a,b,c) = max(\\
&\quad f(r-A, a-1, b, c) - 5A && [\text{si } a > 0 \text{ y } A < r] \\
&\quad f(100, a-1, b, c) - 5A + V && [\text{si } a > 0 \text{ y } A \geq r] \\
&\quad f(r-B, a, b-1, c) - 5B && [\text{si } b > 0 \text{ y } B < r] \\
&\quad f(100, a, b-1, c) - 5B + V && [\text{si } b > 0 \text{ y } B \geq r] \\
&\quad f(r-C, a, b, c-1) - 5C && [\text{si } c > 0 \text{ y } C < r] \\
&\quad f(100, a, b, c-1) - 5C + V && [\text{si } c > 0 \text{ y } C \geq r] \\
&)
\end{aligned}
$$

Cubos de oro

Solución

Con la función anterior, tenemos un código recursivo que nos resuelve la maximización de beneficio para la empresa. Ahora solo nos falta decidir qué pepitas ponemos en el cubo en el que el cliente gana.

Usamos la idea más simple: Probar todas las formas de hacerlo, esto solo es un bucle triple pasando por todos los valores $0 \leq x \leq P_1; 0 \leq y \leq P_2; 0 \leq z \leq P_3$.

Verificamos que que para esos valores de x, y, z el cliente salga ganando, y entonces nuestra solución es:

$f(100, P_1 - x, P_2 - y, P_3 - z) + V - 5(Ax + By + Cz)$.

Si memorizamos las respuestas para la función f usando la técnica de programación dinámica, tenemos una solución con complejidad $\mathcal{O}(K \cdot P_1 \cdot P_2 \cdot P_3)$, con $K = \max r = 100$.