

## Erdos-Straus

Autor: Félix Moreno Peñarrubia

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} \iff n = 4xy - nx - ny.$$

Multiplicando por 4 y sumando  $n^2$ :

$$n(n+4) = n^2 + 4n = 16xy - 4nx - 4ny + n^2 = (4x-n)(4y-n).$$

Entonces,  $(4x-n)$  y  $(4y-n)$  son divisores de  $n(n+4)$ , y son congruentes con  $-n$  (mód 4). Conversamente, si  $n$  es impar y encontramos un divisor  $d$  de  $n(n+4)$  con  $d \equiv -n$  (mód 4) entonces resolviendo  $4x-n = d$ ,  $4y-n = \frac{n(n+4)}{d}$  obtenemos una solución. Además, si  $n$  es impar,  $n$  y  $n+4$  no tienen divisores comunes, así que podemos iterar por separado por los divisores de cada uno en  $O(\sqrt{n})$  (en el caso  $n \equiv 3$  (mód 4) podemos coger  $d = 1$  directamente). Para  $n$  par, cogemos  $x = n/2$ ,  $y = n/2 + 1$ .

```
1 #include<bits/stdc++.h>
2
3 using namespace std;
4
5 using ll = long long;
6
7 int main() {
8     int T;
9     cin >> T;
10    while(T--) {
11        ll n;
12        cin >> n;
13        ll N = n*(n+4);
14        ll x;
15        x = 0;
16
17        if (n%2 == 0) {
18            x = n/2;
19        }
20        else if (n%4 == 3) {
21            x = (n+1)/4;
22        }
23        else {
24            for (int d=3; d*d <= n+4; d += 4) {
25                if (n % d == 0 || (n+4) % d == 0) {
26                    x = (n+d)/4;
27                }
28            }
29        }
30
31        cout << x;
32        if (x > 0) cout << " " << (n+N/(4*x-n))/4;
33        cout << endl;
34    }
35 }
```